ANÁLISIS DE FALLAS USANDO SISTEMAS ESTRUCTURADOS

C. Verde

Instituto de Ingeniería-UNAM
verde@servidor.unam.mx
Coyoacan DF 04510, México
Fax: (52)-55-56228130

Resumen: Este trabajo estudia el problema de detección y aislamiento de fallas con perturbaciones de sistemas estructurados, usando como herramienta de análisis la teoría de grafos. En particular, adoptando la terminología del área de Inteligencia Artificial, se presentan condiciones bajo las cuales es posible monitorear los modos de falla de un sistema ante perturbaciones. Una ventaja de las condiciones obtenidas es su fácil aplicabilidad para analizar el comportamiento ante fallas y perturbaciones de sistemas estructurados causales no lineales complejos con diversos dominios. Se demuestra la potencialidad de la herramienta realizando un análisis de un circuito eléctrico con dos fallas.

Palabras clave: Control tolerante a fallas, análisis estructural de un proceso, diagnóstico de fallas, teoría de grafos.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas físicos pueden enfrentarse a condiciones anormales debido a diversos eventos fuera de control de los responsables. La vulnerabilidad de los sistemas se incrementa a medida que aumentan tanto la complejidad, como el grado de automatización de los procesos. Así, ante fallas de de alto riesgo, es necesario diagnosticar cuándo debe interrumpirse la operación del sistema para evitar daños materiales, e impactar al ser humano y al medio ambiente.

A nivel del sistema de control retroalimentado las fallas producen cambios en la estructura del sistema o en sus parámetros provocando un deterioro en el desempeño y eventualmente una pérdida de funcionalidad de la retroalimentación. Además, un control retroalimentado diseñado en condiciones normales, aunque inciertas, puede propagar y amplificar los efectos de una falla haciendo el sistema completo aun más inseguro. Esta problemática dió origen al Control Tolerante a Fallas, FTC, por sus siglas en inglés, con sus dos tendencias. El diseño tradicional de control robusto que maneja las fallas de manera similar que las incertidumbres y perturbaciones sin generar información sobre las causas de la degradación del desempeño. La otra filosofía más realista llamada **activa** produce alarmas de las componentes fallidas y simultáneamente toma acciones remediales usando la reconfiguración y el acomodo del sistema en general (Blanke *et al.*, 2003).

Así, un FTC activo está integrado por un diagnóstico en línea con capacidad de detección y aislamiento de fallas, FDI (Isermann, 1997) junto con un rediseño del control que debe operar de acuerdo al tipo y dimensión de las fallas diagnosticadas (Puig *et al.*, 2004).

El principio de diagnóstico está basado en la consistencia entre el comportamiento normal y el actual de un proceso obtenido a través de mediciones. Para ello, se hace uso de diversos

[1] Supported by DGAPA-UNAM-IN11403-2

ISBN: 970-32-2137-8

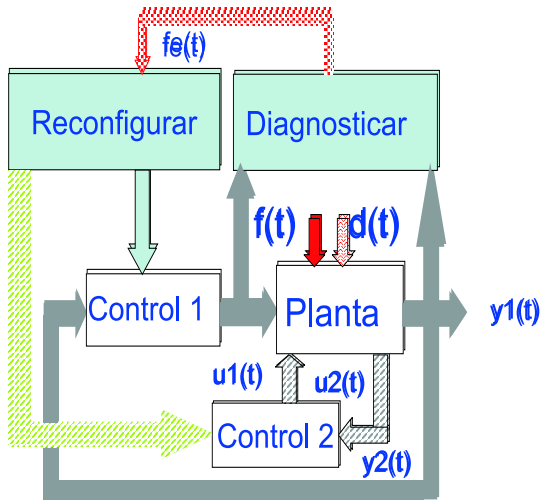

Fig. 1. Esquema de un control tolerante a fallas

tipos de modelos y de un análisis considerando escenarios posibles de fallas incluyendo efectos de propagación. En este sentido, resulta crucial tanto el tipo de modelo usado en el diagnóstico como las fallas asumidas.

La Fig. 1 muestra un esquema general de FCT retroalimentado en donde $d(t)$ corresponde a las perturbaciones y $f(t)$ a las fallas del proceso. Así, a través del diagnóstico se deben detectar las fallas y restructura el esquema de control, vía el comando $fe(t)$, modificando el conjunto de acciones y mediciones del proceso.

Un sistema de control está caracterizado por sus propiedades estructurales, las cuales posibilitan la operación de la planta en condiciones normales, como son: la observabilidad, la controlabilidad, el que sea estabilizable, el desacoplo de perturbaciones, etc. Con respecto al FCT activo, estas propiedades deben garantizarse en condiciones de fallas e incluir nuevas características como son la monitoriabilidad y reconfigurabilidad del esquema de control (Gehin *et al.*, 2000).

Por otro lado, tomando en cuenta que las condiciones de fallas generan familias de comportamiento y modelo con parámetros desconocidos, resulta más apropiado para el diseño de FTC de un sistema complejo analizar las propiedades estructurales del sistema en términos de un modelo genérico de bajo nivel y matrices de incidencia (Dion *et al.*, 2003) que usando un modelo cuantitativo con incertidumbres.

El objetivo de este trabajo es estudiar las condiciones de aislamiento de fallas como una extensión a la observabilidad y monitoreabilidad de un circuito usando la teoría de grafos causal descrita en (Blanke *et al.*, 2003). Este análisis resulta necesario como antecedente al diseño de los algoritmos de FDI y FTC activo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: Primero se introducen las bases de un grafo estructural de un sistema. En este sentido se consideran la observabilidad de un grafo y se incluyen condiciones para la monitoreabilidad de un sistema de control. Apoyado en estas propiedades se introducen condiciones de detección robusta de fallas ante incertidumbres. Finalmente se ejemplifica como aplicar un modelo estructural para estudiar el aislamiento de fallas de un circuito eléctrico y se reportan las conclusiones del análisis.

2. SISTEMAS ESTRUCTURALES

Existen diversas metodologías para describir la estructura de un sistema a través de grafos y matrices de incidencia. En este trabajo se adopta la gráfica estructural causal propuesta en (Gehin *et al.*, 2000) como medio para relacionar el comportamiento de las variables conocidas y desconocidas de un sistema.

Considere un sistema $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{Z})$ con un conjunto de restricciones $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ que pueden incluir derivadas y un conjunto de variables $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, ..., z_p\} = x \cup u \cup y \cup \Theta$ donde x corresponde al estado, u a la entrada, y a la salida, y Θ a los parámetros del sistema.

El modelo estructural o estructura del sistema es un grafo dipartita $(\mathcal{C},\mathcal{Z},\mathcal{E})$ donde las variables están representadas por círculos, las restricciones por barras y el conjunto de aristas que une los conjuntos de las variables $\mathcal{Z}$ y las restricciones $\mathcal{C}$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{C} \times \mathcal{Z}$ está definido por:

$$\begin{aligned} (c_i, z_j) \in \mathcal{E} &\quad \text{si } z_j \text{ está presente en } c_i \\ (c_i, z_j) \notin \mathcal{E} &\quad \text{en caso contrario} \end{aligned}$$

Se hace notar que $\mathcal{Z}$ puede contener derivadas y variables en diferentes dominios.

Apoyandose en esta definición, es posible describir de manera compacta la estructura de un sistema por medio de una matriz de incidencia, en donde las filas y columnas corresponden a los elementos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{Z}$ y cada arista se representa por un "1" en la intersección de la fila y columna correspondiente.

Definición 1. Un subsistema estructural es una pareja $(\phi, Q(\phi))$ donde $\phi \subset 2^{\mathcal{C}}$ y su subgrafo estructural está relacionada con $(\phi, Q(\phi))$.

Definición 2. Un subconjunto de aristas $\mathcal{E}$ se dice que es un enlace $\mathcal{M}$ si las proyecciones de las restricciones pc,

$$\begin{aligned} pc : \mathcal{E} &\to \mathcal{C} \\ e = (\alpha, \beta) &\mapsto pc(e) = \alpha \end{aligned}$$

y de las variables pz,

ISBN: 970-32-2137-8

$$pz : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Z}$$
$$e = (\alpha, \beta) \mapsto pz(e) = \beta$$

son injectivas. Es decir

$$\forall \quad e_1, e_2 \in \mathcal{M} : \quad e_1 \neq e_2$$

$$\Rightarrow pc(e_1) \neq pc(e_2) \quad \& \quad pz(e_1) \neq pz(e_2)$$

Definición 3. Una cadena alternada o trayectoria P disjunta entre los nodos n_i y n_j de un grafo se define como la secuencia de aristas alternando variables y restricciones empezando en n_i y terminando en n_j, y que no cruza dos veces por un nodo. Un grafo formado por cadenas alternadas se denota como grafo bipartita.

Definición 4. Un enlace es llamado completo con respecto a $\mathcal{C}$ o (a $\mathcal{Z}$) si se mantiene $|MA| = |\mathcal{C}|$ o ($|MA| = |\mathcal{Z}|$) siendo MA el máximo enlace del sistema.

Usando el concepto de enlace y asignando una orientación a cada arista, se pueden interpretar las variables de un sistema como una consecuencia de una restricción en un grafo estructural. Es decir, existe una relación causa efecto que puede ser explotada para analizar la estructura de un sistema por niveles. En el caso de restricciones con derivadas se requiere una condición adicional para poder evaluar las incognitas. En (Blanke *et al.*, 2003) se presenta una discusión exhaustiva de esta temática.

Por ejemplo, considerando el modelo

$$c_1 : \quad u = \dot{x} + x$$

$$c_2 : \quad y = f(x)$$

con restricciones $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$, variables $\mathcal{Z} = \{u, x, y, \dot{x}\}$ y variables conocidas $\mathcal{K} = \{y, u\}$, se obtiene la matriz de incidencia de la Tabla (1) y el grafo causal bipartita de la Fig. 2.

\	u	x	y	$\dot{x}$
$c1$	1	1		1
$c2$		1	1	

Tabla 1. Matriz de incidencia

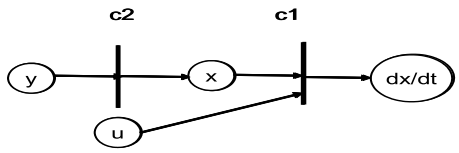

Fig. 2. Enlace causal

Definición 5. Una variable z_2 en un grafo estructural es alcanzable desde z_1 si existe una cadena alternada de aristas desde z_1 hasta z_2.

Definición 6. Una variable z_2 es alcanzable desde un subconjunto $\mathcal{X} \subset Z \backslash \{z2\}$ si existe una $z_1 \in \mathcal{X}$ tal que z_2 es alcanzable desde z_1.

Definición 7. Un subconjunto de variables $\mathcal{Z}_2$ es alcanzable desde un subconjunto $\mathcal{Z}_1$ si cualquier variable de $\mathcal{Z}_2$ es alcanzable desde $\mathcal{Z}_1$.

Un resultado clásico de los años 50's de la teoría de grafos permite afirmar que cualquier grafo bipartita de dimensión finita puede descomponerse en tres subgrafos canónicos (Izadi-Zamanabadi, 1999):

(1) El sobre-restringuido $\mathcal{S}^+ = (\mathcal{C}^+, \mathcal{Z}^+)$ definido cuando hay un completo enlace sobre $\mathcal{Z}$, pero no en $\mathcal{C}$.
(2) El justo-restringuido $\mathcal{S}^0 = \left(\mathcal{C}^0, \mathcal{Z}^0\right)$ definido cuando hay un completo enlace tanto sobre $\mathcal{Z}$ como $\mathcal{C}$.
(3) El sub-restringuido $\mathcal{S}^- = (\mathcal{C}^-, \mathcal{Z}^-)$ definido cuando hay un completo enlace sobre $\mathcal{C}$, pero no en $\mathcal{Z}$.

A partir de estos tres subconjuntos y separando el conjunto $\mathcal{Z} = \mathcal{K} \cup \mathcal{X}$ en variables conocidas, $\mathcal{K}$, y desconocidas, $\mathcal{X}$, es posible determinar bajo que condiciones se puede calcular el conjunto $\mathcal{X}$ y los grados de redundancia existentes para su evaluación. Este hecho es la principal razón para el uso de la estructura de un sistema en el análisis de sistemas de FDI y FTC.

3. PROPIEDADES PARA EL DIAGNÓSTICO

La observabilidad de un sistema es una propiedad estructural explotada con gran éxito en el diagnóstico de fallas vía modelos analíticos del proceso (Frank and Ding, 1997). Así, de manera análoga, la observabilidad estructural junto con el concepto de redundancia se puede aplicar para estudiar la factibilidad de un diagnóstico de fallas.

En particular, se adoptan las siguientes definiciones.

Definición 8. Un modo de falla $\mathcal{F}$ está definido como un cambio en un conjunto de restricciones $\mathcal{C}_f \subset \mathcal{C}$ o como un cambio en los elementos de los conjuntos $\mathcal{K}$ y $\mathcal{X}$.

En condiciones de falla los nodos (restricciones y variables) afectados por ésta, generan errores los cuales se propagan a lo largo de trayectorias del grafo bipartita. Por tanto una estructura adecuada para FDI debe permitir cadenas opcionales para validar la consistencia del sistema y detectar la presencia de las fallas, así como su identificación. En otras palabras, un prerequisito para un estructura de monitoreo es la existencia de

ISBN: 970-32-2137-8

cadenas de redundancia, las cuales puedan conectarse para conocer la evolución del conjunto $\mathcal{X}$, vía diferentes trayectorias P que no contienen las restricciones $\mathcal{C}_f$ involucradas en las fallas.

Definición 9. Una variable $x_j \in \mathcal{X}$ es estructuralmente observable si es alcanzable solamente desde un subconjunto de las variables conocidas vía una trayectoría $P(\mathcal{K})$.

Esta definición es una generalización del concepto de calculabilidad usada en la teoría de grafos.

Considere el sistema general

$$\dot{x}_d = g(x_d, x_a, u, d, f) \quad (1)$$
$$0 = m(x_d, x_a, u, d.f) \quad (2)$$
$$y = h(x_d, x_a, u, d, f) \quad (3)$$
$$\dot{x}_d = \frac{d}{dt} x_d \quad (4)$$

donde d corresponde al vector de perturbaciones, f al vector de fallas y el conjunto de variables conocidas es $\mathcal{K} = u \cup y$, el de las desconocidas $\mathcal{X} = x_d \cup x_a \cup \dot{x}_d \cup d \cup f$ y el conjunto de restricciones está dado por $\mathcal{C} = g \cup m \cup h \cup \frac{d}{dt}$. Además suponga que la descomposición canónica del subgrafo de variables desconocidas $(\mathcal{C}_x, \mathcal{X}, \mathcal{E}_x)$ está dado por

$$\mathcal{S}^+ = \left(\mathcal{C}_x^+, \mathcal{X}^+\right)$$
$$\mathcal{S}^0 = \left(\mathcal{C}_x^0, \mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^0\right)$$
$$\mathcal{S}^- = \left(\mathcal{C}_x^-, \mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^-\right),$$

en ausencia de perturbaciones y fallas. Bajo estas condiciones, se puede demostrar lo siguiente.

Teorema 1. Una condición necesaria y suficiente para que la estructura del sistema (1-4) sea observable estructuralmente sobre la causalidad de la derivada es que se satisfaga las siguientes condiciones:

(1) Todo elemento de $\mathcal{X}$ sea alcanzable desde el conjunto $\mathcal{K}$.
(2) El subsistema sobre-restringuido $\mathcal{S}^+$ y el exacto $\mathcal{S}^0$ sean causales.
(3) El subsistema subdeterminado $\mathcal{S}^- = \phi$.

(Gehin *et al.*, 2000)

Definición 10. La parte monitoreable de un sistema estructural en ausencia de perturbaciones es el subconjunto de restricciones $\mathcal{C}_m$ con redundancia analítica y estructuralmente sensible a los cambios provocados por el conjunto de modos de falla $\mathcal{F}$.

Teorema 2. Dos condiciones equivalentes y necesarias para que el modo de falla $\mathcal{F}$ sea monitoriable en ausencia de perturbaciones son:

(1) $\mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}_{obs}$ con $\mathcal{X}_f = \mathcal{Q}(f) \cap \mathcal{X}$ el conjunto de variables desconocidas asociadas a las fallas, y $\mathcal{X}_{obs}$ el conjunto observable de la estructura $(\mathcal{C} \backslash \{f\}, \mathcal{Z})$;.
(2) Las restricciones $\mathcal{C}_f$ afectadas por el conjunto de fallas f pertenezcan a la parte sobre-restringuida $\mathcal{S}^+$ del sistema, siendo ésta estructuralmente observable.

(Blanke *et al.*, 2003)

Cabe hacer notar que la detectabilidad es un concepto más relajado que la monitoreabilidad y se puede formular bajo la siguiente condición, la cual no ha sido reportada en el contexto de SA.

Proposición 1. Considere el subconjunto de variables desconocidas $\mathcal{X}_f$ asociadas con $\mathcal{C}_f$, entonces el modo de falla $\mathcal{F}$ es detectable si:

(1) Existe un subconjunto $\mathcal{X}_{sf} \subseteq \mathcal{X}_f$ con $\mathcal{X}_{sf} \subseteq \mathcal{X}_{obs}$, donde $\mathcal{X}_{obs}$ es el subconjunto observable de la estructura.
(2) El subgrafo justo-restringuido $\left(\mathcal{C}_f^0, \mathcal{X}_{sf}^0\right)$ es diferente del vacío, y permite generar una relación de paridad.

Condiciones (1) y (2) se justifican con el siguiente razonamiento.

Sea $|\mathcal{C}_i| = p$ y considere los p subconjuntos de variables desconocidas asociados a cada restricción

$$\mathcal{X}_{ci} = \mathcal{Q}(c_i) \cap \mathcal{X} \qquad i = 1, ..., p,$$

entonces, definiendo el subconjunto $\mathcal{X}_{sf} := \bigcup_i \mathcal{X}_{ci}$ para toda $\mathcal{X}_{ci} \subset \mathcal{X}_{obs}$, se tiene el máximo subconjunto de variables desconocidas contenido en $\mathcal{X}_f$ que pueden ser evaluadas vía una trayectoria libre de fallas $P(\mathcal{K})$ (o equivalentemente usando $\tilde{c} = \mathcal{C} \backslash \mathcal{C}_f$) y que satisfacen (1) y (2). Dado que estas variables pueden ser obtenidas en condiciones normales a través de $c_i \in \mathcal{C}_f$, existe una redundancia en el subgrafo la cual puede ser usada para definir relaciones de paridad con la estructura

$$\mathcal{Q}(\tilde{c}) \cap \mathcal{X} - \mathcal{Q}(c_i) \cap \mathcal{X} = 0.$$

Por otro lado, si la condición (2) no se cumple, quiere decir que no existe redundancia en la estructura y el modo de falla no puede ser detectado.

La diferencia en el manejo de perturbaciones y de fallas en un FTC demanda especial atención. En este sentido, el Teorema 2 no es aplicable ante perturbaciones lo cual hace necesaria la extensión al problema de monitoreabilidad robusta de una estructura. La definición y proposición introducidas a continuación no han sido reportadas en la literatura de SA.

Definición 11. La parte monitoreable de un sistema estructural con un conjunto de perturbaciones $\mathcal{D}$ y modo de falla $\mathcal{F}$ es un subconjunto de restricciones $\mathcal{C}_{m \backslash d}$ con redundancia analítica estructuralmente sensibles a los cambios provocados

ISBN: 970-32-2137-8

por los modos de fallas e insensibles a los cambios provocados por las perturbaciones.

Proposición 2. Considere el subconjunto de variables desconocidas asociadas a las fallas $\mathcal{X}_f$ y el subconjunto de restricciones $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}\backslash(\mathcal{C}_d \cup \mathcal{C}_f)$, el modo de falla $\mathcal{F}$ ante $\mathcal{D}$ es detectable si:

(1) Existe un subconjunto $\mathcal{X}_{sf} \subseteq \mathcal{X}_f$ que satisface $\mathcal{X}_{sf} \subseteq \mathcal{X}_{obs}$ donde $\mathcal{X}_{obs}$ es el subconjunto observable con $\mathcal{C}_n$.

(2) El subgrafo justo-restringuido $\left(\mathcal{C}_f^0, \mathcal{X}_{sf}^0 \cup \mathcal{X}_{sf}^-\right)$ es diferente del vacío, y permite generar una relación de paridad.

Esta proposición se justica de forma similar a la (1). La diferencia básica es el conjunto de restricciones que pueden usarase para generar la estructura justo-restringuido; en este caso sólo se pueden usar $\mathcal{C}_f$ para generar las ecuaciones de paridad. Cabe hacer notar, que estas condiciones no garantiza el aislamiento de las fallas, si el modo de falla incluye mas de una.

A continuación se lleva a cabo un análisis sobre el diagnóstico de un circuito eléctrico aplicando las herramientas propuestas en esta sección.

4. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE UN CIRCUITO ELÉCTRICO

Considere el modelo no lineal de un cuádripolo con dos fallas simultáneas $f_1 = \lambda_1 H_2$, y $f_2 = \lambda_2 H_3$ obtenido a partir de las ecuaciones diferenciales parciales que describen una línea de transmisión (Skilling, 1951) con las siguientes restricciones:

$$L_1\dot{Q}_1 = H_1 - H_2 - R_1 Q_1 \quad \text{(c1)}$$
$$C_1\dot{H}_2 = Q_1 - Q_2 - f_1 \quad \text{(c2)}$$
$$L_2\dot{Q}_2 = H_2 - H_3 - R_2 Q_2 \quad \text{(c3)}$$
$$C_2\dot{H}_3 = Q_2 - Q_3 - f_2 \quad \text{(c4)}$$
$$L_3\dot{Q}_3 = H_3 - H_4 - R_3 Q_3 \quad \text{(c5)}$$

$$\dot{Q}_1 = \frac{dQ_1}{dt} \quad \text{(d1)}$$
$$\dot{H}_2 = \frac{dH_2}{dt} \quad \text{(d2)}$$
$$\dot{Q}_2 = \frac{dQ_2}{dt} \quad \text{(d3)}$$
$$\dot{H}_3 = \frac{dH_3}{dt} \quad \text{(d4)}$$
$$\dot{Q}_3 = \frac{dQ_3}{dt} \quad \text{(d5)}$$
$$y_1 = Q_1 \quad \text{(c6)}$$
$$y_2 = Q_3 \quad \text{(c7)}$$

donde los estados corresponden a las corrientes Q_i para $i = 1, ..., 3$ y a los voltajes H_i para $i = 2, 3$; las variables conocidas están dadas por los voltajes H_1 y H_4 y las corrientes Q_1 y Q_3 del cuádripolo. Además, los parámetros L_i, C_i, y R_i corresponden a los valores de inductancia capacitancia y resistencia distribuida de la red y se suponen conocidos y los valores desconocidos λ_1, λ_2, dependen de las resistencias de fugas de los capacitores y se asocian a las fallas.

Para analizar las condiciones de detectabilidad y aislamiento de las fallas se parte del modelo de estado obteniendo los conjuntos de restricciones $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, ..., c_{12}\}$, de variables conocidas

$$\mathcal{K} = \{Q_1, Q_3, H_1, H_4\},$$

de desconocidas

$$\mathcal{X} = \{Q_2, H_2, H_3, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dot{Q}_3, \dot{H}_2, \dot{H}_3\},$$

y de parámetros $\theta = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. La matriz de incidencia para el conjunto $\mathcal{X}$ asociado al modelo dinámico de la red está dada en la Tabla 2 y es el punto de partida del análisis.

En ausencia de fallas, a partir de la matriz de incidencia, Tabla 2, se pueden encontrar varias trayectorias alternadas para evaluar $\mathcal{X}$ con diferentes subconjuntos de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{C}$. Por razones de espacio se omiten las matrices, presentando aquí únicamente las cadenas de la estructura.

Dado que las cadenas

$$\begin{aligned} P_2 :& y_2 - c_7 - Q_3 - d_5 - \dot{Q}_3 - c_5 - H_3 - d_4 \\ & - \dot{H}_3 - c_4 - Q_2 - d_3 - \dot{Q}_2 \\ & - c_3 - H_2 - d_2 - \dot{H}_2 \end{aligned} \quad (5)$$
$$P_1 : y_1 - c_6 - Q_1 - d_1 - \dot{Q}_1 \quad (6)$$

obtenidas de la Tabla 1 contienen a todo $\mathcal{X}$, es posible alcanzar a todos sus elementos, resultando que c_2 y c_1 son restricciones redundantes. A partir de la descomposición de la estructura causal, se obtiene que $S^- = \phi$ con los siguientes posibles subsistemas sobre-restringuidos

$$\{c_2, d_3\}, \quad \{c_4, d_3\}, \quad \{c_2, c_3\}, \quad \{c_4, c_3\}$$

Entonces, por el Teorema 1, se puede afirmar que la estructura es observable, independientemente de los valores del circuito con cualquiera los dos elementos de $\mathcal{K}$ en condiciones normales. De las cadenas (5) y (6) se observa que las derivadas d_i incrementan la cardinalidad del subsistema sobre-restringuidos, aumentando así la posibilidad para evaluar $\mathcal{X}$. Es decir, al eliminar alguna de las restricciones $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$, se limita la monitoreabilidad de la estructura y por tanto la posibilidad de diseñar un FTC.

Considere ahora, sólo la existencia de la falla λ_1 y se desea estudiar la monitoreabilidad del sistema. De la tabla se tiene que el conjunto $C_f = c_2$ y las variables asociadas a la falla son $\mathcal{X}_f = \{Q_2, H_2, \dot{H}_2\}$. Para verificar si es posible evaluar estas variables sin usar c_2 se observa que

ISBN: 970-32-2137-8

$\searrow$	Q_1	H_2	Q_2	H_3	Q_3	$\dot{Q}_1$	$\dot{H}_2$	$\dot{Q}_2$	$\dot{H}_3$	$\dot{Q}_3$	H_1	H_4	λ_1	λ_2
c_1	1	1				1					1			
c_2	1	1	1				1						1	
c_3		1	1	1				1						
c_4			1	1	1				1					1
c_5				1	1					1		1		
c_6	1					1								
c_7		1					1							
c_8			1					1						
c_9				1					1					
c_{10}					1					1				
c_{11}	1													
c_{12}					1									

Tabla 2. Matriz de Incidencia del circuito eléctrico

las trayectorias dadas en (5) y (6) no cruzan por c_2 y son causales. Entonces, usando la segunda condición del teorema 2, se afirma que la estructura es monitoreable aún con la presencia de la λ_1. Además como también se satisface (1) y (2) de la proposición 1, la falla es detectable y se puede usar c_2 para generar el residuo $r_f = \dot{H}_2 - \frac{a_2}{z_1}(Q_1 - Q_2)$.

Por simetría en la estructura del sistema el comportamiento de la falla (λ_2) es análogo al caso anterior y se omite en esta presentación.

Suponga ahora la presencia de ambas fallas y se desea estudiar si es posible monitorear el circuito y aislar cada una de las fallas. En este caso

$$\mathcal{C}_f = \{c_2, c_4\}$$
$$\mathcal{X}_f = \{H_2, \dot{H}_2, H_3, \dot{H}_3, Q_2\}.$$

Considerando $\mathcal{C}\backslash\mathcal{C}_f$, al descomponer la estructura se obtiene, que Q_2 no es alcanzable al eliminar las restricciones $\mathcal{C}_f$. Así que la estructura no es monitoreable con dos fallas. Ahoras, usando $\dot{Q}_2 \in \mathcal{S}_{sf}$ para evaluar Q_2 y suponiendo conocida su condición inicial, se tiene que $|\mathcal{X}_{sf}| = 8$ y de manera aislada c_2 o c_4 forma parte del subgrafo justo-restringuido. Por tanto se satisfacen las condiciones de detectabilidad con la siguiente relación de paridad.

$$2Q_2(\tilde{c}) - Q_i(c_2) - Q_i(c_4) = 0.$$

Para estudiar el problema de aislamiento de las dos fallas, una de ellas se trata como perturbación. En este caso, usando la proposición (2) se obtiene la relación de paridad específica para la falla λ_i:

$$Q_2(\tilde{c}) - Q_i(c_{2i}) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Del análisis, se observa que al aumentar el número de fallas se reduce la cardinalidad de la estructura monitoreable. Esto se justifica, debido a que las restricciones, inhabilitadas para cálculo, aumentan al tener mas fallas, y por tanto la redundancia del sistema se reduce. Un efecto similar de reducción de cardinalidad es provocado por las perturbaciones.

5. CONCLUSIONES

Se presentan algunas herramientas nuevas para estudiar el problema de diagnóstico de fallas en un sistema complejo con diferentes dominios, a partir únicamente de su estructura causal. El estudio presentado, considerando un circuito eléctrico, muestra la potencialidad de las herramientas de teoría de grafos y modelos estructurales para obtener información a un nivel muy general de los posibles casos de solución al problema de diagnóstico y aislamiento de fallas, como trabajo previo al diseño de un sistema de FDI o de FTC.

6. REFERENCIAS

Blanke, M., M. Kinnaert, J. Lunze and M. Staroswiecki (2003). *Diagnosis and fault Tolerant Control*. Springer. Berlin.

Dion, J.M., C. Commault and J. van der Woude (2003). Generic propertie and control of linear structured systems: a survey. *Automatica* **39**, 1125–1144.

Frank, P. and X. Ding (1997). Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal Proc. Control* **7**, 403–424.

Gehin, A. L., M. Assas and M. Staroswiecki (2000). Strucural analysis of system reconfigurability. In: *4th IFAC SAFEPROCESS*. Vol. 1. pp. 292–297.

Isermann, R. (1997). Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods: an introduction. *Contr. Eng. Practice* **5(5)**, 639–652.

Izadi-Zamanabadi, R. (1999). *Fault-tolerant Supervisory Control-System Analysis and Logic Design*. PhD tesis Aalborg University. Denmark.

Puig, Vicenc, Joseba Quevedo, Teresa Escobet, Bernardo Morcego and Carlos Ocampo (2004). Control tolerante a fallos (parte 1): Fundamentos y diagnóstico de fallos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **1-(1)**, 15–31.

Skilling, H. (1951). *Electric Transmission Lines*. McGraw-Hill-Prentice. New York.

ISBN: 970-32-2137-8